Structure de valeurs de vérité

Christophe Chalons

Structures de valeurs de vérité

Christophe Chalons, équipe de logique mathématique de Paris7

February 18, 2014

1 Introduction

Nous démontrons quelques théorèmes concernant des "logiques un peu exotiques". La notion centrale, historiquement inventée par Paul Cohen, depuis utilisée dans moult domaines (qui les revendiquent d'ailleurs indûment de manière un peu trop propriétaire) est celle de forcing.

Le forcing consiste essentiellement à "s'apercevoir" que $(\{vrai; faux\}, \to, \forall)$ est un triplet $(E, \to, \phi)$ où E est un ensemble, $\to$ est une application de E^2 dans E et ϕ est une application de $P(E)$ dans E.

Quand on remplace $(\{vrai; faux\}, \to, \forall)$ par un autre triplet mais qui lui ressemble assez, par exemple une algèbre de Boole complète, il n'y a "rien à faire" pour faire "comme si" on raisonnait dans $(\{vrai; faux\}, \to, \forall)$.

Par contre, les énoncés mathématiques ne deviennent plus des noms d'objets vivant dans l'ensemble à deux éléments $\{vrai; faux\}$, mais des noms d'objets vivant dans l'ensemble E.

L'énoncé $\forall x R(x)$ avec une variable liée x, ne fait que nommer $\phi(\{R(a) \mid a$ parcourt tout l'univers des ensembles$\})$. L'attribution d'une valeur de vérité à un énoncé atomique est évidente puisqu'on est en théorie des ensembles et que les seuls énoncés atomiques sont de la forme $a \in b$

La découverte de Cohen est d'avoir remarqué (et démontré!!) que si pour E, on prend l'ensemble des bons ouverts (un bon ouvert est l'intérieur de son adhérence) de l'espace topologique produit $\mathbb{Q}^\kappa$ alors l'hypothèse du continu (ici l'énoncé "hypothèse du continu" écrit avec des $\forall, \to, \in$ n'est que le nom d'un bon ouvert) ne contient pas le bon ouvert désigné par l'énoncé qu'est l'axiome d'extensionnalité. Or comme tous les axiomes de ZFC (axiomes de la logique classiques inclus), en ce qui les concerne eux, sont des noms différents qui désignent tous $\mathbb{Q}^\kappa$, il s'en suit que l'hypothèse du continu ne peut pas être prouvée dans ZFC.

Bien évidemment le forcing est difficile pour plusieurs raisons:

- il faut trouver des algèbres de Boole, on veut des résultats d'indépendance forts donc dont "on peut prouver" que "même la logique classique" ne les décident pas
- il faut que la valeur de l'axiome d'extensionnalité ne soit pas trop petite (les autres axiomes de ZFC ne posent pas de problème)

Ici nous ne occupons de ces choses-là, bien difficiles techniquement. Nous racontons juste quelques remarques assez "triviales" et reposantes, **car nous choisissons volontairement de... ne pas chercher des algèbres de Boole complètes**. Nous prenons un peu "n'importe quoi" au hasard et y étudions ce qu'il s'y passe. On va voir que les logique exotiques qui émergent ne sont pas forcément inintéressantes et surtout qu'elles ne nécessitent pas toute la dextérité nécessaire pour le maniement du forcing.

2 Intuitionnisme (syntaxe)

2.1 Logique intuitionniste

La logique intuitionniste est l'ensemble (appelés ensemble des théorèmes intuitionnistes) des énoncés qui sont obtensibles par conjonctions quelconques et modus ponens à partir des axiomes suivants:

- $A \to (B \to A)$
- $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
- $(A \to B) \to ((B \to X) \to (A \to X))$
- $C \to item$ dès lors que $item \in$ la conjonction C
- $C \to (C_1 \to C_2)$ où C est de la forme $conjonction_i\ des\ (A_i \to B_i)$ et C_1 de la forme $conjonction_i\ des\ A_i$ et C_2 de la forme $conjonction_i\ des\ B_i$

Il y a moult variations... équivalentes. On récupère la logique classique en ajoutant à ces axiomes $\forall A : (non(non(A))) \to A$, où $non(A) := A \to (\forall X : X)$

2.2 Autres logiques

Nous regroupons sous des dénominations diverses les logiques à partir de leurs axiomes. Attention: ces dénominations ne sont que partiellement fidèles à leur utilisation d'origine.

- La logique intuitionniste a été définie ci-dessus
- La logique classique est la logique obtenue en ajoutant tous les axiomes $(((a \to b) \to a) \to a)$ à la logique intuitionniste
- La logique affine est la logique obtenue à partir des axiomes $A \to (B \to A)$; $(A \to B) \to ((B \to X) \to (A \to X))$; $A \to ((A \to B) \to B)$
- la logique linéaire est la logique obtenue à partir des axiomes $(A \to B) \to ((B \to X) \to (A \to X))$; $A \to ((A \to B) \to B)$

3 Définitions des autres connecteurs

La logique intuitionniste a une sémantique obtenue en remplaçant dans la sémantique classique où $\{vrai; faux\}$ est l'ensemble des valeurs de vérité (cet ensemble à deux éléments est appelé ensemble des valeurs de vérité) l'ensemble des valeurs de vérité par une topologie sur un ensemble.

Rappels: dans toutes les logiques, aussi exotiques soient-elles, les connecteurs subalternes sont définis comme suit:

- $A\ et\ B :=$ la conjonction$_X$ (on abrège en disant $''\forall X''$) des $((A \to (B \to X)) \to X)$
- $A\ ou\ B :=$ la conjonction$_X$ des $((A \to X) \to ((B \to X) \to X))$
- $tout := \forall X : X$
- $nonA := A \to tout$

3.1 Définitions équivalentes de implique, etc dans la sémantique "topologique"

On suppose donnée une topologie sur un ensemble (que l'on ne nomme pas ici, pas besoin):

- $U \to V :=$ la réunion des ouverts X tels que $U \cap X \subseteq V$
- $U\ ou\ V := U \cup V$
- La conjonction$_i$ des U_i est l'intérieur des l'intersection des U_i
- $tout := \emptyset$
- $vrai :=$ l'espace topologique entier (l'ensemble de ses points)

3.2 Une différence essentielle avec le classique

Il existe un modèle (ie un espace topologique) dans lequel les seuls énoncés envoyés sur "vrai" sont les théorèmes.

4 Comment s'apercevoir vite que quelque chose n'est pas intuitionnistiquement prouvable?

Il y a de nombreuses techniques. Le plus souvent on utilise un modèle où l'énoncé n'est pas envoyé sur vrai. On peut aussi utiliser l'élimination des coupures.

4.1 Exemple

L'exemple qui suit est contre-intuitif, et, en première impression, ne semble pas concerné par la différence entre classicisme et intuitionnisme. L'énoncé suivant n'est pas un théorème intuitionniste:

$$(\forall i : (A\ ou\ B_i)) \to (A\ ou\ \forall i : B_i)$$

Voici un contre-modèle: on se place dans l'espace topologique $(\mathbb{R}, usuelle)$ et $A :=]-\infty, 0[$. Pour chaque $e > 0$, on pose $B_e :=] -e, +\infty[$. Pour chaque $e > 0$, la valeur de vérité de $(A\ ou\ B_e)$ est $\mathbb{R}$. Par contre, la valeur de vérité de $(A\ ou\ \forall e > 0 : B_e)$ est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5 Structures de valeurs de vérité

Définition 1 *On appelle une structure de valeurs de vérité un triplet $(E, \to, \phi)$ où $\to$ est une application de E^2 dans E et ϕ une application de $P(E)$ dans E*

L'exemple primordial est $(2, \to, min)$ où $\to: (x, y) \mapsto (1 \setminus x) \cup y$. C'est "le vrai / faux" des logiciens classiques, des platoniciens. On définit le vrai de la structure comme étant par définition $\phi(\emptyset)$. On note $tout := \phi(E)$. De plus, quand on a une famille $(a_i, i \in J)$ d'éléments de E, on dit de manière imagée que $\phi(\{a_i \mid i \in J\})$ est la conjonction des $a_i, i \in J$, ce qui permet:

- $A\ et\ B :=$ la conjonction$_X$ (on abrège en disant $''\forall X''$) des $((A \to (B \to X)) \to X)$
- $A\ ou\ B :=$ la conjonction$_X$ des $((A \to X) \to ((B \to X) \to X))$
- $tout := \forall X : X$
- $nonA := A \to tout$

Ci-dessus est décrit comment l'ensemble des ouverts d'un espace topologique peut être muni de deux opérations assez naturelles le rendant SVV. On va aborder d'autres exemples. Avant, on parle de regard et de logique.

6 Exemple avec les anneaux

Prenons les axiomes d'anneau commutatif unitaire (ils ne contiennent pas le mot "ou" dans leurs énoncés). On ajoute deux constantes a, b au langage et un symbole fonctionnel inv. On suppose $ab = 0$. On n'a toujours pas utilisé le mot "ou". On ajoute l'axiome $\forall x : non(x = 0) \to x \times inv(x) = 1$. Toujours pas d'utilisation du mot "ou". On ne pourra donc pas prouver que $a = 0$ ou $b = 0$ (sauf si on peut prouver $a = 0$, étant donné la symétrie du problème*).

6.1 Un exemple qui m'a été suggéré sur un forum par Michel Coste

Voici une preuve simple (sans background) d'un théorème qui m'a été signalé, qui semble bien connu. (C'est probablement un des théorèmes sans lequel le livre *géométrie synthétique* n'existerait d'ailleurs pas)

L'argument ci-dessus (section d'avant), qui utilise l'élimination des coupures ne permet pas de démontrer la non prouvabilité (intuitionniste) de l'énoncé $a^2 = 0 \to a = 0$ dans la théorie des pseudo-corps. En effet, plus de "ou" à l'horizon. La preuve ci-dessous est non syntaxique (qui utilise le forcing) c'est un exemple d'utilisation triviale, où on n'a pas besoin de chercher "l'algèbre de boole" qui va accomplir des prouesses, puisqu'on ne cherche... qu'un algèbre de Heyting)

D'abord quelques précisions:

Définition 2 *Un pseudo-corps est un anneau commutatif unitaire vérifiant tout élément non nul est inversible.*

Classiquement, un pseudo-corps est un corps. Mais là, on est en logique intuitionniste, donc on n'est pas restreint aux SVV qui sont des algèbres de Boole. Cette immense liberté va nous couvrir de surprises (bien agréables ou pas, c'est subjectif)

Théorème 3 *Pour chaque anneau commutatif unitaire, il existe une SVV qui le considère comme un pseudo-corps*

Autrement dit, on n'ajoute à peu près rien à supposer (en logique intuitionniste!!!) qu'un anneau est un pseudo-corps. Il n'y a aucune raison qu'il ne le soit pas déjà. Tout dépend des yeux avec lesquels on le regarde.

Preuve: soit A un anneau commutatif unitaire. Soit E l'ensemble des idéaux de A autres que A lui-même. On met une topologie sur E. Soit $x \in A$. On note T_x l'ensemble des $X \in E$ tels que $x \in X$. Soit T la topologie engendrée par les T_x quand x parcourt A, ie la réunion des intersections finies de T_x.

Remarque: l'intersection des T_x quand x parcourt un ensemble fini F n'est rien d'autre que l'ensemble des idéaux qui contiennent comme sous-ensemble l'idéal engendré par les éléments de F. Une base d'ouverts de T est donc constituée par les Y_J où $Y_J := \{X \in E \mid J \subseteq X\}$, quand parcourt les idéaux de type fini. (A vrai dire, je ne vois même pas pourquoi on ne ferait pas parcourir à J tous les éléments de E mais peu importe).

On définit la valeur de vérité d'un énoncé (du langage des anneaux, à paramètres dans A) comme dit dans la section "au delà de l'intuitionnisme", en partant de l'initialisation $val(a = b) := T_{a-b}$ (et comme d'hab, $val(A \to B) := val(A) \to^* val(B)$ et $\forall x R(x) :=$ réunion des ouverts inclus dans tous les $val(R(a))$).

Rappel: $U \to^* V :=$ la réunion des ouverts W tels que $U \cap W \subseteq V$. $tout := \emptyset$ et $VRAI := E$ (toutes les autres valeurs de vérité, ie tous les autres ouverts (ie éléments de E) représentent des valeurs de vérité inhabituelles pour le penseur classique)

Bon, de toute façon, juste pour étudier l'énoncé $(a = 0 \to tout) \to existsx : ax = 1$, pas besoin de se fatiguer beaucoup. Regardons ce que vaut $U := val(a = 0 \to tout)$. C'est la réunion des ouverts qui sont disjoints de T_a. Soit J un idéal. A quelle condition Y_J est-il disjoint de T_a? Réponse quand (a) est premier avec J. En effet, Y_J c'est l'ensemble des idéaux $X \in E$ tels que $J \subseteq X$. Pour qu'aucun idéal X de E ne contienne a comme élément et J comme sous-ensemble, il faut que $(a) + J \ni 1$.

Soit $V := val(\exists x : ax = 1)$. Soit $X \in E$. Supposons que $X \in U$. Alors il existe J étranger à a (comme dit ci-dessus) tel que $X \supseteq J$. Il existe donc dans X un élément t et dans A un élément x tel que $1 = t + xa$. Donc $X \in val(1 = xa) \subseteq V$. Conclusion: $val[(a = 0 \to tout) \to existsx : ax = 1]$. Ainsi regardé par la SVV (E, T) l'anneau A est déclaré comme étant un pseudo-corps avec la valeur VRAI.

7 Notion de regard

On ne s'intéresse dans ce qui suit qu'aux langages où les connecteurs primitifs sont $\to$ et $\forall$.

Définition 4 *Soit L un langage. On appelle L-regard un couple (S, f) où $S = (E, \to, \phi)$ est une SVV et f une application de l'ensemble des énoncés atomiques de L dans E*

L'avantage d'une SVV est qu'on peut faire des "conjonctions" quelconques, donc attribuer une valeur de vérité à n'importe quel énoncé. La valeur de vérité attribuée à un énoncé P du langage L par (S, f) est notée $val(L, S, f, P)$

Si L est un langage et S une SVV, alors la logique du couple (L, S) est l'ensemble des énoncés P tels que $\forall f : val(L, S, f, P) = vrai$. Par exemple, n'importe quelle SVV topologique (ie l'ensemble des ouverts muni des opérations déjà décrites) a une logique qui inclut la logique intuitionniste (sur les langages habituels)

7.1 Exemple non intuitionniste

Soit A un anneau commutatif, unitaire. Soit E l'ensemble des idéaux de A. On construit $(\to, \phi)$ de sorte que $(E, \to, \phi)$ soit une SVV assez naturelle:

- $I \to J := \{x \in A \mid \forall y \in I : xy \in J\}$
- $\phi(X) :=$ l'intersection des éléments de X

Définition 5 *On appelle logique$(E, \to, \phi)$ l'ensemble des formes qui ne peuvent prendre que la valeur $\phi(\emptyset)$ quand on la contextualise (ie quand on attribue des valeurs à ses feuilles)*

Un anneau n'a aucune raison d'avoir une logique qui inclut la logique intuitionniste. Par contre,

Théorème 6 *Tous les anneaux ont une logique qui contient la logique affine*

Preuve (évidente), laissée au lecteur

Définition 7 *Un anneau-test est un anneau où tout élément est multiple de son carré*

Dans un anneau-test, la logique intuitionniste est réalisée. L'anneau $\mathbb{Z}$, par exemple, ne réalise pas la logique intuitionniste, on y a que $((2) \to (4)) = (2)$ sans pour autant que $(2) = vrai$.

Rappelons, à ce propos que $((a \to b) \iff a) \to b$ est un théorème de la logique intuitionniste et est originairement le fauteur de trouble à l'origine de la crise des fondements, dans la mesure où les êtres humains "ressentent" l'existence d'un phrase qui, parlant d'elle-même, dit *j'implique que les poules ont des dents*. La logique de $\mathbb{Z}$ ne collapse pas, ie ce n'est pas parce qu'elle considère que $((2) \to (4)) = (2)$ que (4) est un de ses théorèmes.

Comme cas particulier d'anneaux-test, il y a **les corps, qui, eux réalisent la logique classique**.

Voici maintenant les preuves des affirmations précédentes:

7.2 Preuves

Définition 8 *On appelle logique affine (ici) l'ensemble des énoncés obtenus par modus ponens à partir de tous les énoncés de la forme* $a \to (b \to a)$; $a \to ((a \to b) \to b)$ *et* $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$

Pour montrer que tout anneau (commutatif) réalise la logique affine, il suffit de prouver que pour un anneau commutatif unitaire quelconque A, si U, V, W sont des idéaux alors les idéaux dont une écriture est de la forme ci-dessus sont l'anneau tout entier.

Commençons par $U \to (V \to U)$. Son égalité avec A résulte de $U \subseteq (V \to U)$.

Traitons maintenant le cas de l'idéal $U \to ((U \to V) \to V)$. Il suffit de prouver que $U \subseteq (U \to V) \to V$. Soient $x \in U$, $y \in U \to V$. Alors $xy \in V$. CQFD

Il reste $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$. Il suffit pour prouver que c'est l'anneau entier si on considère a, b, c comme des idéaux, de prouver que $(a \to b) \subseteq ((b \to c) \to (a \to c))$, donc de prouver que pour tout $x \in a \to b$ pour tout $y \in b \to c$, l'élément xy est dans $a \to c$. Soit donc $z \in a$. Alors $xz \in b$. Donc $yxz \in c$. On vient de prouver que $xy \in a \to c$.

7.2.1 Remarque

Théorème 9 *Dans un anneau quelconque, il y a égalité entre les idéaux* $a \to (b \to c)$ *et* $(ab) \to c$, *où* ab *désigne le produit des idéaux* a, b, *ie l'ensemble des sommes de produit d'un élément de* a *avec un élément de* b.

On notera aussi la présence d'un autre "et" qui fait son apparition. Celui issu de la conjonction: $a \; et_2 \; b := a \cap b$. On voit poindre (mais ce n'est pas notre sujet), des distinctions qui ont été découvertes et sont traitées par la spécialité qui s'occupe de logique linéaire, logique affine, etc.

7.3 Retour aux preuves

Montrons qu'un anneau-test réalise la logique intuitionniste. Pour cela, il suffit de prouver que $a \to (a \to b) \subseteq a \to b$. Soit $x \in a \to (a \to b)$ et $y \in a$. Alors $xy \in a \to b$ donc $xyy = xy^2 \in b$. Soit k tel que $y = ky^2$. On obtient $xy = kxyy \in b$. Conclusion: $x \in a \to b$.

Question 10 *Il est évident qu'un corps réalise la logique classique. Qu'en est-il des anneaux-test?*

7.4 Théorèmes

Définition 11 *Soit A un anneau commutatif unitaire. La logique de A est l'ensemble des énoncés dont la valeur ne peut être que A tout entier quelle que soit l'interprétation des symboles primitifs. De manière informelle, nous désignons par "logique annelée" l'intersection des logiques de tous les anneaux commutatifs*

Nous allons classer les anneaux selon leur logique, dans les deux théorèmes qui suivent, et consacrerons la sous section suivante à les prouver.

Théorème 12 *Pout tout anneau commutatif unitaire A, A réalise la logique intuitionniste si et seulement si A est un anneau-test*

Le théorème suivant caractérise les anneaux réalisant la logique classique:

Théorème 13 *Pout tout anneau commutatif unitaire A réalise la logique classique si et seulement si A est (isomorphe à) un produit fini de corps.*

Remarque: A est produit fini de corps si et seulement si tous les idéaux de $A[X]$ sont principaux

7.5 Preuves

Nous avons déjà prouvé ci-dessus que les anneaux tests réalisent la logique intuitionniste. Nous prouvons la réciproque:

Soit $a \in A$. Comme A réalise la logique intuitionniste, en notant $J := (a^2)$, et $I := (a)$, on obtient $I \to (I \to J) \subseteq I \to J$. Or $1 \in I \to (I \to J)$ car si $x \in I$ et $y \in I$ alors $1xy \in J$. Donc $1 \in I \to J$, ce qui entraine que $1a \in J$, donc que a est multiple de a^2.

Nous prouvons maintenant qu'un anneau qui réalise la logique classique est un produit fini de corps:

Pour tout idéal J de A, $non(J) := J \to \emptyset$ est l'annulateur de J. Il s'ensuit que tout idéal de A est égal à l'annulateur de son annulateur, du fait que $(I \to J) = A$ ssi $I \subseteq J$.

A est forcément un anneau-test, puisqu'il réalise, en particulier, la logique intuitionniste. Dans un anneau-test tout idéal premier est maximal, à cause des éventuelles survenues des égalités $x(1 - kx) = 0$. Dans un anneau-test, le produit et l'intersection de deux idéaux sont égaux. Il suffit finalement qu'on prouve que l'ensemble des idéaux maximaux est fini.

On munit $P(A)$ de la topologie produit (en le regardant comme 2^A). L'ensemble des idéaux premiers **est un sous-compact**. Dans un anneau test, tout idéal premier est maximal, donc **l'ensemble des idéaux maximaux est ce même sous-compact**.

Il suffit de montrer qu'il est fini. Soit P un idéal maximal. Alors il existe a non nul tel que P est l'annulateur de (a) (c'est là qu'est utilisé le fait que l'anneau réalise la logique classique, ie tout idéal est égal à son bi-annulateur). Soit Q un idéal maximal différent de P et soit $x \in P \setminus Q$. Alors $ax = 0$ donc $a \in Q$. Il s'ensuit que P **est le seul élément de l'ouvert (qui le contient), ensemble des idéaux maximaux à ne pas contenir** a

Ainsi chaque idéal maximal P appartient à un ouvert dont il est le seul élément. La compacité entraîne la finitude de l'ensemble des idéaux maximaux. Or leur intersection est l'idéal (0), puisque A n'a pas d'éléments nilpotent et que tous les premiers sont maximaux. L'anneau A est donc un produit fini de corps

Il reste à prouver qu'un produit fini de corps réalise la logique classique. Pour cela nous prouvons un théorème chargé de messages philosophiques.

Théorème 14 *Soient A, B des anneaux (commutatifs, unitaires). Supposons que L soit une logique réalisée par les deux anneaux. Alors L est réalisée par l'ensemble des idéaux produits de A et B.*

Il peut à priori exister d'autres idéaux de $A \times B$ que ceux de la forme $I \times J$, avec $(I, J) \in Ideaux(A) \times ideaux(B)$. On retombe exactement sur la difficulté logique soulevée par la façon dont l'espace produit tensoriel représente l'état d'un couple d'objet en MQ, créant ainsi le "paradoxe EPR" à partir d'états non obtensibles par un produit tensoriel de deux vecteurs de chaque espace composant.

Il suffit de montrer que $(U_1 \times U_2) \to (V_1 \times V_2) = (U_1 \to V_1) \times (U_2 \to V_2)$ (et idem avec l'intersection), où les indices $1, 2$ représentent respectivement l'appartenance aux idéaux de A, B.

Soit $(x_1, x_2) \in (U_1 \times U_2) \to (V_1 \times V_2)$. Prouvons qu'il est dans $(U_1 \to V_1) \times (U_2 \to V_2)$. Il suffit de prouver que $x_1 \in U_1 \to V_1$. Soit $y_1 \in U_1$. Alors $(y_1, 0) \in U_1 \times U_2$. Il s'en suit que $(x_1y_1, 0x_2) \in V_1 \times V_2$ donc $x_1y_1 \in V_1$.

Réciproquement, soit $(x_1, x_2) \in (U_1 \to V_1) \times (U_2 \to V_2)$. On souhaite prouver qu'il est dans $(U_1 \times U_2) \to (V_1 \times V_2)$. Soit $(y_1, y_2) \in U_1 \times U_2$. Comme $x_1 \in U_1 \to V_1$, donc $x_1y_1 \in V_1$. Idem avec l'indice 2. Il s'en suit que $(x_1y_1, x_2, y_2) \in (U_1 \times U_2) \to (V_1 \times V_2)$

Cependant cette difficulté de "non localisation" des idéaux n'existe pas avec les produits finis de corps, puisque les idéaux d'un produit fini de corps sont forcément des produits d'idéaux des corps composants.

7.6 Buveur

L'axiome général du buveur est l'énoncé qui affirme $\forall R \exists a\ (R_a \to (\forall R_x))$. Cet énoncé est une conséquence de $\forall X : [non(non(X)) \to X]$ (que l'on abrègera par "<RPA">). Dans le cas général, le buveur, par contre n'entraîne pas le RPA, comme le montre n'importe quel ordinal E muni de la topologie $E \cup \{E\}$ et des opérations usuelles qui munissent l'ensemble de ses ouverts d'une structure de SVV.

On a vu ci-dessus que les anneaux-test (aussi semble-t-il nommés anneaux Von Neuman réguliers) réalisent la logique intuitionniste. On peut se demander si, dans le cas général, ces anneaux offrent à la logique intuitionniste un cadre complet. Comme on va le voir, il n'en est rien: tous les anneaux tests réalisent $buveur \to RPA$, bien que cet énoncé ne soit pas un théorème de logique intuitionniste.

Théorème 15 *Tout anneau commutatif unitaire réalise $INTU \wedge buveur \to RPA$*

Preuve: il suffit de prouver qu'un anneau-test réalise $buveur \to RPA$. Dans un anneau-test, tous les idéaux premiers sont maximaux et il n'y a pas de nilpotents. Il s'en suit que l'intersection des idéaux maximaux est nulle. Le buveur entraîne alors que la disjonction des $M \to (0)$, quand M parcourt les idéaux maximaux propres, doit être l'anneau tout entier, autrement dit que 1 appartient à la somme des idéaux $M \to (0)$. Soient $1 = a_1 + ... + a_n$ avec les a_i des éléments respectifs de $M_1, .., M_n$. Soit $x \in M_1 \cap .. \cap M_n$. Alors $x = x(a_1 + .. + a_n) = 0 + 0.. + 0 = 0$. Il s'en suit que $x = 0$ et donc que (0) est intersection finie d'idéaux maximaux. L'anneau est produit fini de corps et réalise donc le RPA (et donc la logique classique)

8 Rèves d'antan

Les anneaux en général ne réalise pas la logique intuitionniste. Cela offre une opportunité pour étudier les contradictions qui ont provoqué la crise des fondements avec un regard neuf. On résume dans la paragraphe suivant, l'argument clé, dû semble-t-il à Russel, qui a déclenché cette crise au début du vingtième siècle.

8.1 La crise

La seule existence de la phrase *j'implique tout*, permet de tout avoir. Formellement, il s'agit d'une phrase que l'on considère comme ayant la propriété que $A = (A \to tout)$. Or $(A \iff (A \to B)) \to B$ est un théorème de logique minimale (logique intuitionniste exprimée avec seulement le connecteur $\to$. Rappelons que $(U \iff V) \to W$ abrège $(U \to V) \to ((V \to U) \to W))$.

Nous en donnons une preuve qui montre où un axiome puissant (le droit de cloner des ressources) joue un rôle primordial. L'équivalence entre A et $A \to B$ entraine que $A \to (A \to B)$. Si on considère ce dernier énoncé comme entrainant $A \to B$, on obtient alors, non seulement $A \to B$, mais aussi $A \to B$, donc finalement B. L'axiome $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$ a joué un tôle prépondérant. En remplaçant B par *tout* (dont rappelons que c'est une abréviation de $\forall X : X$), la phrase $A :=$*j'implique tout*, qui est ressentie comme telle que $A = (A \to tout)$, va donc en particulier vérifier $A \iff (A \to tout)$. On déduira de sa simple existence que *tout*.

L'axiome $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$ (que nous appelons *droit de cloner des ressources*) parait une évidence à toute la démarche scientifique du fait qu'on peut photocopier les preuves de mathématiques. C'est, en particulier, un axiome de la logique intuitionniste.

Ci-dessus, les anneaux, qui sont des objets algébriques familiers à un grand nombre de spécialistes, offrent l'avantage de **ne pas réaliser la logique intuitionniste**. On a vu que les anneaux qui la réalisent sont les anneaux test. Ils sont très particuliers et très proches des corps (ils sont essentiellement des quotients de produits de corps, n'ont pas de nilpotents et tout idéal premier y est maximal)

On peut donc se demander s'ils ne peuvent pas ressusciter des rêves d'antan où "<toute collection serait un ensemble. Plutôt que d'écrire l'intégralité de ce rêve, voyons ce qu'il en est sur des cas particulier.

8.2 Rappel de la "<bonne théorie"> (hélas contradictoire)

Avant de formaliser par ZF (ZFC, etc) les mathématiques, le sentiment général consistait à utiliser une théorie très puissante (trop!) puissante qui était simplement l'axiome d'extensionnalité auquel on ajoutait le schéma $\exists a \forall x (x \in a \iff R(x))$, faisant varier R sur toute les relations qu'on pouvait définir. La crise des fondements est arrivée avec le constat que $\exists a \forall x (x \in a \iff (x \to x \to tout))$ entraîne *tout*.

Comme on l'a vu, l'utilisation du "<droit de cloner des ressources"> joue un rôle prépondérant dans l'argument. En changeant la structure de valeurs de vérité du discours, on peut se demander si les contradictions demeurent. Nous allons prouver qu'elles demeurent "<partiellement">, mais l'horizon des questions qu'on peut se poser reste ouvert

Notons dès à présent que pour l'anneau le plus routinier des mathématiciens, l'existence de phrases A, B telles que $A = (A \to B)$ est courante sans pour autant qu'on ait $B = vrai$, comme le montre l'exemple avec $\mathbb{Z}$, des idéaux $(2), (4)$ qui vérifient $(2) \to (4) = (2)$, alors que ni (2) ni (4) ne sont l'anneau $\mathbb{Z}$ tout entier.

Dans ce nouveau paradigme (on n'est plus dans $(\{vrai, faux\}, ..)$, mais dans la SVV constituée des idéaux d'un anneau A), on peut se demander ce que le fait de supposer que tous les axiomes $\exists a \forall x (x \in a \iff R(x))$ désignent l'anneau A tout entier a comme conséquence sur l'anneau A. Dans la suite nous énonçons quelques théorèmes introductifs et invitons le lecteur à pousser plus loin l'étude. Nous notons U l'univers, nous continuons de noter $x \in y$, mais cette notation désigne **un idéal de l'anneau** A. Nous remplaçons le signe équivalent par un "<="> conformément à une ligne générale issue du forcing. On rappelle que le "<tout"> d'un anneau est l'idéal nul (0).

Théorème 16 *L'anneau A est doté d'un idéal égal à son propre annulateur. Il contient des nilpotents non nuls.*

Preuve: le fait d'avoir pour tout $x \in U : ((x \in x) \to (0)) = (x \in a)$ entraîne que l'idéal $a \in a$ est égal à $((a \in a) \to (0))$. Notons J cet idéal. L'idéal $J \to (0)$ est l'annulateur de J. On a donc $J = annul(J)$. Si $1 \notin J$ alors $\exists x \in J : 1x \neq 0$. De plus, $\forall x \in J : 0 = x.x = x^2$. Il s'en suit que $0 = 1$ ou J contient des éléments non nuls.

Selon qu'on choisisse d'étendre à plus ou moins de R les axiomes $\exists a \forall x (x \in a \iff R(x))$, on va constater qu'on tombe vite sur un anneau A tel que $0 = 1$. soit N l'idéal des éléments nilpotent et Z le radical de Jacobson de l'anneau A.

Théorème 17 *Le fait d'avoir pour tout $x \in U : ((x \in x) \to N) = (x \in a)$ entraine que $0 = 1$. Le fait d'avoir pour tout $x \in U : ((x \in x) \to Z) = (x \in a)$ entraine que $0 = 1$.*

Comme ci-dessus, on obtient un idéal J égal à $J \to N$, en prenant l'idéal $J := (a \in a)$. Cela entraîne que $J \subseteq N$. En effet, si $e \in J$ alors $e.e \in N$ donc e^2 nilpotent, donc e nilpotent. Si $1 \notin J$ alors $\exists x \in J : 1x \notin N$. Il s'ensuit que $0 = 1$. La preuve est exactement la même avec Z à la place de N

A priori, il n'y a cependant rien d'évident à ce que $R(x) := ((x \in x) \to N)$ ne soit définissable avec $(\in, \to, \forall)$. De même pour $R(x) := ((x \in x) \to Z)$. On ne peut donc pas strictement parlant dire qu'il n'existe pas de modèle annelé de la théorie naive "<idéale"> qui a précédé ZF. La question se pose.